

Образцы задач для экзамена по курсу «Уравнения математической физики» (факультет ВМК МГУ, 3-й курс, 5-й семестр, 3-й поток, 2020-2021 учебный год).

$$1. \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = x \cdot e^{-x^2}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_t = u_{xx} + 3, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 3t, \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_t = u_{xx} + 2 \sin x \cos 2x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x, \ t < +\infty, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \\ u_t(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x, \ t < +\infty, \\ u(0, t) = -\sin t, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = -\cos x. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} - \sin t, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0, t) = \sin t, & u(\pi, t) = \sin t, \ t > 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x, \\ u_t(x, 0) = \sin 3x. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ t > 0, \\ u_x(0, t) = 0; \ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \\ u(x, 0) = \cos 3x, \\ u_t(x, 0) = \cos^3 x. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u_x(0, t) = t; \ u_x(\pi, t) = t, \\ u(x, 0) = \cos^2 x, \\ u_t(x, 0) = \sin^2 x. \end{cases}$$

11. Решить задачу Дирихле в полуплоскости

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, & 0 < y < +\infty, \\ u \Big|_{y=0} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

12. Решить задачу Дирихле в полуплоскости

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, & 0 < y < +\infty, \\ u \Big|_{y=0} = \cos 2x. \end{cases}$$

13. Решить следующую задачу Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

14. Решить следующую задачу Дирихле в кольце

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u \Big|_{r=1} = \cos^2 \varphi, \\ u \Big|_{r=2} = \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

15. Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < \pi, & 0 < y < \pi, \\ u \Big|_{x=0} = \sin 2y, & u \Big|_{x=\pi} = 0, \\ u \Big|_{y=0} = 0, & u \Big|_{y=\pi} = 0 \end{cases}.$$

16. Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u_x \Big|_{x=0} = 0, & u_x \Big|_{x=\pi} = 0, \\ u \Big|_{y=0} = 0, & u \Big|_{y=\pi} = \cos 2x \end{cases}.$$

17. Корректно ли поставлена задача?

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u \Big|_{x=0} = 0, & u \Big|_{x=\pi} = 0, \\ u \Big|_{y=0} = \sin x, & u \Big|_{y=\pi} = 0 \end{cases}.$$

18. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & x^6 + y^6 + z^6 < 1, \\ u \Big|_{x^6 + y^6 + z^6 = 1} = 2021 \end{cases}.$$

19. Решить задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = -(x^6 + y^6), & x^2 + y^2 < 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x^2+y^2=1} = 2021 \end{cases}.$$

20. Решить задачу Неймана

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^4 + y^4 < 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x^4+y^4=1} = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

21. Найти потенциал двойного слоя внутри эллипсоида

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1, \quad \text{если плотность } \nu = \nu_0 \text{ является постоянной.}$$

22. Найти логарифмический потенциал двойного слоя

$$\text{при } y > 0, \quad \text{если } \nu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

23. Корректно ли поставлена задача?

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx} & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \cos(kx). \end{cases}$$

24. Найти логарифмический потенциал двойного слоя

$$\text{с постоянной плотностью } \nu_0 \text{ вне эллипса } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

25. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^4 < 1, \\ u \Big|_{x^2+y^4=1} = y \end{cases}.$$

26. Для оператора $L[u] = y^3 u_{xx} + x u_{yy} - x^2 u_y - x^2 y^2 u$ построить сопряженный оператор.

27. Справедлива ли формула среднего значения для функции $u(x, y) = x^3 - 6x^2 y - 3xy^2 + 2y^3$?

28. Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u_x \Big|_{x=0} = 0, \\ u \Big|_{t=0} = \cos^2(kx). \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |x| + |y| < 10, \\ u \Big|_r = 20. \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 3, \\ u \Big|_{r=3} = \sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi. \end{cases}$$